Résumé 14 : Séries entières

I Convergence

- On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ l'élément de $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} R &= \sup\{r\geqslant 0 \text{ tels que } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}\}. \\ &= \sup\{r\geqslant 0 \text{ tels que } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0.\} \\ &= \sup\{r\geqslant 0 \text{ tels que } \sum a_n r^n \text{ converge.}\} \\ &= \sup\{r\geqslant 0 \text{ tels que } \sum |a_n| r^n \text{ converge.}\}. \end{aligned}$$

  Ainsi, avec les notations évidentes,
  - $R_{|a|} = R_a$.
  - Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
  - Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_b \leqslant R_a$.
  - Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $R_a \geqslant 1$.
- Le domaine $\mathscr{D}$ de convergence de la série entière vérifie alors

$$D(0,R)\subset \mathscr{D} \subset \overline{D(0,R)}.$$

  .
  La série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument si $|x| < R$ et diverge grossièrement si $|x| > R$.
  La série entière converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.
- Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont pour rayons de convergence $R_a > 0$ et $R_b > 0$, alors toute combinaison linéaire de ces deux séries a un rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
  On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série entière $\sum c_k x^k$, où pour tout $k\in\mathbb{N}$, $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$. C'est une série entière dont le rayon de convergence vérifie aussi $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et sa somme est égale au produit $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$ pour tout x de module $< \min(R_a, R_b)$.

II Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle et de rayon R non nul. Nous noterons $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Alors la série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ a également pour rayon de convergence R. De plus, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et pour tout x dans cet intervalle, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.
- La fonction $x\in]-R,R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de f qui s'annule en 0.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Comme corollaire, on obtient que deux sommes de séries entières coïncident sur un voisinage de 0 si et seulement si ces deux séries sont égales.

III Fonctions développables en série entière

- Définition d'une fonction DSE sur $]-r,r[$, sur un voisinage de 0.
- Développements en série entière en 0 des fonctions $\exp, \sin, \cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{argth}, \arctan, x\mapsto \dfrac{1}{1-x}, x\mapsto \ln(1-x), x\mapsto (1+x)^\alpha$.
- Formule de Taylor-Lagrange.

ANNEXE

Exercices :

CCP 18 : On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercices :

CCP 20 : Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum n^{(-1)^n} z^n.$$

Exercices :

CCP 21 :

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.

   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercices :

CCP 22 :

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.